

# Innhold

<b>Velkommen til studiet .....</b>	<b>15</b>
Forord .....	15
Innledning .....	16
<b>Kapittel 1      Tallenes hemmeligheter .....</b>	<b>19</b>
<i>Olav Gravir Imenes</i>	
1.1     Innledning.....	19
1.2     Regning med hele tall .....	23
1.2.1   Etterfølgerprinsippet.....	23
1.2.2   Velordningsprinsippet .....	24
1.2.3   Lukkethet under operasjoner.....	27
1.2.4   Divisjon .....	29
1.2.5   Delerlighet .....	34
1.2.6   Minste felles multiplum og største felles faktor .....	38
1.2.7   Euklids algoritme for å finne største felles faktor .....	41
1.3     Kongruens .....	47
1.3.1   Definisjon av kongruens .....	47
1.3.2   Eksempler på kongruens.....	51
1.3.3   Regning med rester .....	55
1.3.4   Formelle bevis for regneregler i kongruensregning.....	59
1.3.5   Delerlighetsregler .....	69
1.3.6   Feiloppdagning ved hjelp av kongruensregning .....	72
1.3.7   Grupper.....	75
1.4     Lineære kongruenslikninger .....	82
1.4.1   Løsning med klokke-metoden.....	82
1.4.2   Løsning med multiplikasjonstabell.....	88
1.4.3   Nulldivisorer .....	89
1.4.4   Løsning med diofantiske likninger.....	94

1.5	Heltallsløsninger av lineære likninger (diofantiske likninger) ....	95
1.5.1	Å finne én løsning ved hjelp av Euklids algoritme .....	95
1.5.2	Å finne alle løsninger .....	97
1.5.3	Å finne positive løsninger .....	99
1.5.4	Grafisk framstilling av løsninger .....	100
1.5.5	Løsning av diofantiske likninger ved omforming til kongruenslikninger .....	101
1.5.6	Tilfeller hvor den diofantiske likningen ikke har løsning .....	103
1.6	Tallenes byggesteiner: Primtall .....	107
1.6.1	Eratostenes' såld .....	109
1.6.2	Bruk av aritmetikkens fundamentalteorem til å skrive og multiplisere tall .....	111
1.6.3	Bevis av aritmetikkens fundamentalteorem .....	112
1.6.4	Å sjekke om et stort tall er et primtall .....	117
1.7	Kryptografi .....	118
1.7.1	Bokstavkoder .....	119
1.7.2	Feiloppdagingskoder .....	124
1.7.3	Diffie-Hellmann nøkkelsutveksling .....	128
1.8	Tallfølger .....	133
1.8.1	Aritmetiske følger .....	135
1.8.2	Geometriske følger .....	143
1.8.3	Rekker .....	145
1.9	Fibonacci-tallene .....	148
1.9.1	Historisk eksempel: Kaninoppdrett .....	148
1.9.2	I naturen .....	152
1.9.3	Binets formel .....	153
	Litteratur .....	156
<b>Kapittel 2</b>	<b>Geometri .....</b>	<b>159</b>
	<i>Andrea Hofmann og Odd Tore Kaufmann</i>	
2.1	Innledning .....	159
2.1.1	Historisk tilbakeblikk .....	159
2.1.2	Geometri i LK06/13 og kort presentasjon av kapitlene ...	162
2.2	Geometri i norsk skole .....	164
2.2.1	Innledning .....	164
2.2.2	Striden på 1800-tallet .....	164
2.2.3	Læreplaner (fra 1890-årene til 2013) .....	166
2.3	Romforståelse og bruk av konkreter i geometriundervisningen ...	171
2.3.1	Innledning .....	171
2.3.2	Geometrisk forståelse .....	173
2.3.3	Romlig resonnering .....	176
2.3.4	Utforskning av former og figurer .....	181
2.3.5	Bruk av konkreter i geometriundervisningen .....	182

2.4	Euklidisk geometri og ikke-euklidisk geometri.....	193
2.4.1	Euklid og hans aksiomsystem.....	193
2.4.2	Euklids Elementer .....	195
2.4.3	Euklids katetsetning og Euklids høydesetning.....	198
2.4.4	Ikke-euklidisk geometri.....	200
2.4.5	En liten oversikt over noen egenskaper i euklidisk og ikke-euklidisk geometri.....	207
2.5	Geometriske steder og konstruksjoner .....	209
2.5.1	Konstruksjoner med passer og linjal .....	210
2.5.2	Geometriske steder.....	210
2.5.3	Konstruksjoner av firkanter .....	216
2.5.4	Konstruksjoner som er umulige kun med passer og linjal .....	217
2.6	Utforskning og bevis i geometri.....	229
2.6.1	Bevis i skolen .....	229
2.6.2	Å finne eksempler versus å bevise.....	230
2.6.3	Bevis av periferivinkelsetningen og Thales' setning .....	232
2.6.4	Egenskaper ved firkanter .....	234
2.6.5	Utforskning av geometriske sammenhenger i GeoGebra.....	236
2.7	Romlegemer.....	245
2.7.1	Cavalieris prinsipp.....	245
2.7.2	Polyedre .....	249
2.8	Symmetri .....	262
2.8.1	Symmetri i LK06/13.....	263
2.8.2	Båndsymmetri.....	265
2.8.3	Tapetsymmetri (flatesymmetri).....	269
2.8.4	Sammensetning av symmetrier .....	272
2.9	Trigonometri .....	288
2.9.1	Utforskning: Mot en definisjon av de trigonometriske funksjonene sinus, cosinus og tangens .....	289
2.9.2	Definisjon av sinus, cosinus og tangens for spisse vinkler.....	290
2.9.3	Sinus, cosinus og tangens til noen spesielle vinkler.....	296
2.9.4	Sinus, cosinus og tangens for stumpere vinkler (og generelt for alle vinkler) .....	298
2.9.5	Arealet til en trekant .....	301
2.9.6	Sinussætningen og cosinussætningen .....	302
2.9.7	Radianer .....	305

2.10	Vektorer, kongruensavbildninger og symmetrier i koordinatsystem i planet.....	314
2.10.1	Regning med vektorer.....	316
2.10.2	Kongruensavbildninger i koordinatsystem.....	332
2.10.3	Symmetrier i koordinatsystem.....	335
2.10.4	En anvendelse av vektorregning: Å finne tyngdepunktet til en trekant.....	336
2.11	Geometri i kunst og arkitektur.....	342
2.11.1	Tesselering .....	342
2.11.2	M.C. Escher.....	351
2.11.3	Perspektivtegning .....	356
2.11.4	Det gylne snitt.....	360
	Litteratur .....	376
<b>Kapittel 3</b>	<b>Funksjonslære.....</b>	<b>379</b>
	<i>Inger Christin Borge</i>	
3.1	Funksjoner og reelle tall.....	379
3.1.1	Innledning .....	379
3.1.2	Funksjon og definisjonsmengde.....	381
3.1.3	Tallinja og intervaller.....	382
3.1.4	Diverse funksjoner .....	386
3.1.5	Begrepet grenseverdi.....	397
3.1.6	<i>abc-formelen</i> .....	403
3.1.7	Begrepet kontinuitet og de reelle tallene.....	411
3.1.8	Fortegnsskjema og polynomdivisjon .....	419
3.1.9	Funksjonsdrøfting – definisjoner .....	427
3.2	Derivasjon .....	433
3.2.1	Gjennomsnittlig vekstfart.....	434
3.2.2	Momentan vekstfart – den deriverte.....	437
3.2.3	Derivasjon .....	443
3.2.4	Derivasjonsregler .....	446
3.2.5	Den dobbeltderiverte.....	453
3.2.6	Funksjonsdrøfting .....	454
3.2.7	Maksimums- og minimumsproblemer .....	464

<b>Kapittel 4</b>	<b>Statistikk og kvantitativ metode .....</b>	<b>471</b>
<i>Knut Ole Lysø</i>		
4.1	Stokastiske forsøk og stokastisk variabel .....	474
4.1.1	Forventet verdi .....	475
4.1.2	Varians og standardavvik .....	476
4.2	Normalfordelingen.....	479
4.2.1	Standard normalfordeling .....	482
4.2.2	Generell normalfordeling.....	485
4.3	Populasjon, utvalg og utvalgsfordelinger.....	487
4.3.1	Ulike typer utvalg .....	487
4.3.2	Hva vi skal skaffe informasjon om .....	489
4.3.3	Utvalgsfordelingen til middelverdien og andeler .....	491
4.3.4	Grensefordeling og sentralgrenseteoremet .....	495
4.3.5	Utvalgsfordeling til andeler .....	499
4.4	Estimering.....	503
4.4.1	Punktestimator og punktestimat .....	503
4.4.2	Intervallestimat/konfidensintervall for gjennomsnittet $\mu$ .....	508
4.4.3	Intervallestimat/konfidensintervall for andelen $p$ .....	514
4.4.4	Intervallestimat/konfidensintervall for forskjell i andeler $p_1 - p_2$ .....	517
4.4.5	Intervallestimat/konfidensintervall for forskjell i gjennomsnitt $\mu_1 - \mu_2$ .....	522
4.5	Hypotesesprøving .....	527
4.5.1	Hypoteser om en binomisk $p$ eller andelen $p = S/N$ - innledende problemstillinger .....	529
4.5.2	Hypoteser om et populasjonsgjennomsnitt $\mu$ .....	544
4.6	Hypotesesprøving mellom to populasjoner .....	552
4.6.1	Hypotesesprøving mellom to andeler $p_1$ og $p_2$ .....	553
4.6.2	Hypotesesprøving mellom to populasjons- gjennomsnitt $\mu_1$ og $\mu_2$ .....	559
4.6.3	Hypotesesprøving mellom to populasjonsgjennomsnitt i relaterte stikkprøver.....	564
4.7	Lineære sammenhenger mellom variable.....	567
4.7.1	Korrelasjon og korrelasjonskoeffisient .....	567
4.7.2	Hypoteser om korrelasjonskoeffisienten i populasjonen.	574
4.7.3	Enkel regresjon.....	575
4.7.4	Enkel regresjon utført i Excel .....	581
	Statistiske tabeller .....	587
	Litteratur.....	591

<b>Kapittel 5</b>	<b>Kvalitative metoder i matematikkdidaktisk forskning .....</b>	<b>593</b>
	<i>Kristin Ran Choi Hinna</i>	
5.1	Innledning .....	593
5.1.1	Hva er matematikkdidaktikk?.....	594
5.1.2	Hva er forskning?.....	594
5.2	Bacheloroppgaven.....	596
5.2.1	Eksempler på bacheloroppgaver i matematikkdidaktikk .	596
5.3	Ulike tilnæringer til datainnsamling .....	600
5.3.1	Observasjon .....	601
5.3.2	Intervju .....	605
5.3.3	Triangulering.....	608
5.3.4	Dokumentanalyse.....	609
5.4	Analyse, tolkning og fortolkning .....	610
5.5	Validitet og reliabilitet.....	613
5.5.1	Validitet .....	613
5.5.2	Reliabilitet .....	616
5.6	Etikk.....	618
5.7	Bacheloroppgaven: Forberedelser og skriving.....	623
5.7.1	Forberedelser .....	623
5.7.2	Skrive en fagtekst.....	626
	Litteratur .....	629
<b>Kapittel 6</b>	<b>Undervisningskunnskap i matematikk for lærere på 1.-7. trinn.....</b>	<b>631</b>
	<i>Arne Jakobsen, Janne Fauskanger, Reidar Mosvold og Raymond Bjuland</i>	
6.1	Episoder fra klasserommet .....	631
6.2	Undervisningskunnskap i matematikk - UKM .....	639
6.2.1	Ulike deler av UKM .....	642
6.3	Avrunding .....	652
	Litteratur .....	654

<b>Kapittel 7</b>	<b>Aspekter av lærerens undervisningskunnskap i matematikk.....</b>	<b>657</b>
	<i>Bodil Kleve</i>	
7.1	De fire kategoriene i kvartetten – en utdypning .....	660
7.1.1	Foundation.....	660
7.1.2	Transformation.....	662
7.1.3	Connection.....	663
7.1.4	Contingency.....	664
7.2	Kunnskapskvartetten – hvorfor og hvordan? Eksempler fra klasserommet.....	665
7.2.1	Brøk på 5. trinn – eksempel 1.....	665
7.2.2	Brøk på 5. trinn – eksempel 2.....	673
7.3	Oppsummering.....	682
	Litteratur.....	683
<b>Kapittel 8</b>	<b>Internasjonale studier i matematikk – design, relevans, resultater og trender.....</b>	<b>685</b>
	<i>Liv Sissel Grønmo</i>	
8.1	Internasjonale komparative undersøkelser i matematikk .....	686
8.2	Kjennetegn på matematikk i norsk skole .....	688
8.2.1	Utviklingen i matematikkprestasjoner i Norge fra 1995 til 2011 .....	691
8.3	Tilbakegang og framgang på småskoletrinnet i nordiske land ...	694
8.4	Tilbakegang og framgang på mellomtrinn og ungdomstrinn i nordiske land .....	695
	8.4.1 Tall og algebra i de nordiske landene .....	697
8.5	Eksempler på oppgaver fra TIMSS og TEDS.....	699
	8.5.1 Norske elevers prestasjoner i aritmetikk på barnetrinnet...	700
	8.5.2 Norske elevers prestasjoner i algebra på 8. trinn .....	702
	8.5.3 Norske lærerstudenters prestasjoner i tall og algebra...	704
8.6	Ulike trender i Norge og Sverige.....	710
8.7	Oppsummering og diskusjon.....	712
	Litteratur.....	714

<b>Kapittel 9</b>	<b>Vurdering .....</b>	<b>717</b>
	<i>Helga Kufaas Tellefsen</i>	
9.1	Hva er vurdering, og hvorfor skal vi vurdere? .....	717
9.2	Kontroll eller tilrettelegging for læring? .....	718
9.3	Nasjonale og internasjonale tester .....	720
9.3.1	Internasjonale tester .....	720
9.3.2	Nasjonale tester – Hva forteller de? .....	722
9.4	Vurdering for læring.....	727
9.4.1	Matematisk kompetanse .....	728
9.4.2	Undervisningskunnskap .....	729
9.4.3	Vurdering for læring i klasserommet.....	730
9.4.4	Undervisningssekvens .....	734
9.5	Standpunktvurdering .....	753
	Litteratur .....	755
<b>Kapittel 10</b>	<b>Kartlegging og undervisning i dynamisk perspektiv .....</b>	<b>757</b>
	<i>Svein Aastrup og Ketil Johnsen</i>	
10.1	Innledning .....	757
10.2	Dynamisk kartlegging .....	758
10.2.1	Utgangspunkt for kartlegging .....	760
10.2.2	Hva forteller tradisjonelle kartleggingsprøver, og hva trenger læreren å vite? .....	763
10.2.3	Fange opp eleven som sliter i matematikk .....	764
10.2.4	Å støtte eleven til mestring .....	765
10.2.5	Den dynamiske kommunikasjonen .....	767
10.2.6	Hvem kartlegger .....	768
10.2.7	Første gang – forberedelser .....	768
10.2.8	Erfaringer fra dynamisk kartlegging .....	769
10.2.9	Å lete etter elevens uformelle matematikkunnskaper...	770
10.2.10	I møte med eleven .....	771
10.2.11	Gjennomføring av dynamisk kartlegging – Ivar, 5. trinn .....	772
10.2.12	Supplerende kartlegging .....	778
10.2.13	Hva vi fant .....	781
10.3	Dynamisk undervisning .....	782
10.3.1	Planlegging av tiltak .....	786
10.3.2	Tiltak rettet mot Ivar .....	788
10.3.3	Oppgaveformer .....	791
10.3.4	Struktur og prosess .....	795
10.3.5	Samhandling og metakognisjon .....	804
10.4	Betydningen av vurdering .....	810
10.5	Oppsummering .....	810
	Litteratur .....	812

<b>Kapittel 11</b>	<b>Problemløsning i matematikk .....</b>	<b>815</b>
<i>George H. Hitching og Hans Wilhelm Mørch</i>		
11.1	Innledning.....	815
11.1.1	Oversikt over innhold.....	816
11.2	Hva er problemløsning? .....	817
11.2.1	Et relativt begrep.....	817
11.2.2	Ikke bare én løsningsmetode.....	818
11.2.3	Holdninger til matematikkfaget .....	820
11.2.4	Utforskning.....	821
11.3	Pólyas strategi for problemløsning .....	822
11.3.1	Fire faser.....	822
11.3.2	Eksempler på Pólyas strategi i praksis - løste problemer .....	825
11.3.3	Pólya om heuristikk .....	835
11.3.4	Misoppfatninger rundt Pólyas strategi.....	839
11.3.5	Pólya på grunnskolen.....	841
11.4	Problemløsning og gruppearbeid .....	842
11.4.1	Oppgaver til gruppearbeid.....	842
11.4.2	Heterogene eller homogene grupper .....	842
11.4.3	Ikke bare gruppearbeid .....	843
11.5	Utfordringer .....	844
11.5.1	Det skal være ekte problemløsning .....	844
11.5.2	Å komme gjennom pensum .....	844
11.5.3	Samarbeid med foresatte .....	845
11.5.4	Faglig kunnskap .....	845
11.6	Noen oppgaver.....	846
11.7	Kilder med problemløsningsoppgaver .....	849
	Litteratur.....	849
<b>Kapittel 12</b>	<b>Utematematikk .....</b>	<b>851</b>
<i>Dag Gulaker</i>		
12.1	Om matematikk ute .....	860
12.2	Hva gjør vi? Aktiviteter .....	861
12.3	Tema 1: Måling med 1-metertauet .....	863
12.3.1	Måling .....	863
12.3.2	Brøk og meter.....	864
12.3.3	Metertauet og geometriske figurer.....	865
12.3.4	Metertauet, areal og volum.....	865
12.4	Tema 2: Matematikk i en sykkel .....	866
12.5	Tema 3: Jakten på matematikkord .....	867
12.6	Tema 4: Målestokk.....	868

12.7	Tema 5: Tall og bevegelse .....	869
12.7.1	Del A.....	869
12.7.2	Del B - «36-leken».....	870
12.7.3	Del C - Kaste 21.....	871
12.8	Tema 6: Måling av avstander og høyder.....	871
12.9	Tema 7: Geometriske former .....	874
12.10	Tema 8: Symmetri .....	876
12.11	Tema 9: Vinkler ute.....	877
12.12	Tema 10: Regn med vann, is og snø.....	879
12.13	Tema 11: Kuler og stabling.....	880
12.14	Tema 12: Skattejakt og matematikk.....	882
12.15	Tema 13: «Tårnet i Hanoi» .....	883
12.16	Tema 14: Statistikk ute .....	884
12.17	Tema 15: Å regne i fjæra.....	885
12.18	Tema 16: Den matematiske turen .....	886
12.19	Tema 17: Sola, himmelretning og tid.....	887
	Litteratur .....	888
	<b>Presentasjon av redaktører og forfattere .....</b>	<b>889</b>
	<b>Bildeliste .....</b>	<b>895</b>
	<b>Stikkord .....</b>	<b>897</b>